DOI: 10.13482/j.issn1001-7011.2007.05.010
第 24卷 第 5期 黑龙江大学自然科学学报 Vol.24 No.5
2007年 10月 JOURNAL OF NATURAL SCIENCE OF HEILONGJIANG UNIVERSITY October, 2007

关于 Smarandache函数的一个猜想

乐茂华
(湛江师范学院 数学系, 湛江 524048)

摘 要: 对于正整数 a, 设 $S(a)$是 Smarandache函数。利用有关 Goldbach猜想的结果证明了: 对于任何正整数 k, 方程 $S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_k)=S(x_1+x_2+\cdots+x_k)$都有无穷多组正整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

关键词: Smarandache函数; Diophantine方程; Goldbach猜想
中图分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1001-7011(2007)05-0687-02

设 N是全体正整数的集合。对于正整数 a, 设 $S(a)$是适合 $a|m!$ 的最小正整数 m. 如此的 $S(a)$称为 Smarandache函数。关于该函数的基本性质是近期数论及其相关领域的一个引人关注的研究课题。

最近, 刘燕妮和潘晓玮[1]证明了: 对于任何正整数 k, 方程

$$S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_k)=S(x_1+x_2+\cdots+x_k),\ x_1, x_2, \cdots, x_k\in N \tag{1}$$

都有解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 同时提出了以下猜想:

猜想 对于任何正整数 k, 方程 (1)都有无穷多组解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

本文完整地解决了上述问题, 即证明了:

定理 对于任何正整数 k, 方程 (1)都有无穷多组解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

上述定理的证明要用到下列引理。

引理 1 Smarandache函数有下列性质:

(i) 对于任何正整数 a, $S(a)\leqslant a$.

(ii) 对于互素数的正整数 a和 b, $S(ab)=\max(S(a), S(b))$.

(iii) 对于素数 p, $S(p)=p$.

证明 参见文献 [2].

引理 2 如果 n是大于 10^{10^5}的奇数, 则必有奇素数 p_1、p_2、p_3适合 $n=p_1+p_2+p_3$.

证明 参见文献 [3].

定理的证明 当 $k=1$时,

$$x_1=a,\ a\in N \tag{2}$$

显然都是方程 (1)的解。因此本定理在 $k=1$时成立。

当 $k=2$时, 设 p是奇素数, 又设

$$x_1=p,\ x_2=p(p-1). \tag{3}$$

此时, 从引理 1之 (iii)可知 $S(x_1)=S(p)=p$. 因为 $\gcd(p, p-1)=1$, 故从引理 1之 (i)和 (ii)可知

$$S(x_2)=S(p(p-1))=\max(S(p), S(p-1))=\max(p, S(p-1))=p. \tag{4}$$

从 (4)可得

$$S(x_1)+S(x_2)=2p. \tag{5}$$

同时, 从 (3)可知 $x_1+x_2=p^2$, 并且根据 Smarandache函数的定义可知

收稿日期: 2007-01-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271104); 广东省自然科学基金资助项目 (06029035)
作者简介: 乐茂华 (1952-), 男, 教授, 主要研究方向: 数论

$$S(x_1+x_2)=S(p^2)=2p \quad (6)$$

因此从(5)和(6)可知此时(3)都是方程(1)的解。因为奇素数有无穷多个,所以方程(1)在$k=2$时有无穷多组解。

当$k=3$时,设p是大于10^{105}的奇素数。根据引理2可知:存在奇素数p_1、p_2、p_3可使

$$p=p_1+p_2+p_3. \quad (7)$$

同时,从引理1可知

$$S(p)=p,\ S(p_i)=p_i,\quad i=1,2,3. \quad (8)$$

因此,从(7)和(8)可知

$$x_1=p_1,\quad x_2=p_2,\quad x_3=p_3 \quad (9)$$

是方程(1)的解。由于适合$p>10^{105}$的奇素数有无穷多个,所以方程(1)$k=3$时有无穷多组解。

当$k>3$时,设p是大于$10^{105}+2(k-3)$的奇素数,又设$n=p-2(k-3)$. 从引理2可知在奇素数p_1、p_2、p_3适合$n=p_1+p_2+p_3$. 因为$S(2)=2$,故从(8)可知此时

$$x_1=p_1,\quad x_2=p_2,\quad x_3=p_3,\quad x_j=2,\quad j=4,\cdots,k \quad (10)$$

必为方程(1)的解。由于适合$p>10^{105}+2(k-3)$的奇素数有无穷多个,所以方程(1)有无穷多组解$(x_1,x_2,\cdots,x_k)$. 定理证完。

参考文献

[1] 刘燕妮,潘晓伟. 两个包含Smarandache函数的方程及其解[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2006, 23(6): 857-858

[2] Farris M, Mitchell P. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions J, 2002, 13: 37-42.

[3] 陈景润,王天泽. 关于哥德巴赫问题[J]. 数学学报, 1989, 32(5): 702-718

A conjecture concerning the Smarandache function

Le Maohua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, China)

Abstract: For any positive integer a, let $S(a)$ denote the Smarandache function. Using a result on the Goldbach conjecture, it is proved that for any positive integer k, the equation $S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_k)=S(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ has infinitely many positive integer solutions $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$.

Key words: Smarandache function; diophantion equation; Goldbach conjecture

(上接第686页)

Bioinformatical analysis of the ESTs of specially expressed genes in the apomictic M14 of sugar beet

Mei Qiwen, Hu Weiming, Wu Yedong, Li Haiying

(Key Laboratory of Molecular Biology, College of Life Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: M14 is a monosomic addition line with the characteristic of apomixis. By using the methods of suppression subtractive hybridization (SSH) and mRNA differential display reverse transcriptional PCR (DDRT-PCR) between M14 and A2Y, 298 ESTs of specially expressed genes of M14 were obtained and the relevant bioinformatics analysis was made. Then, they were annotated and classified by GO (Gene ontology) method, 5 ESTs whose function were closely related to regulation of gene expression and cell cycle. The research is the basis for obtaining full-length cDNA of these ESTs and characterizing their protein functions in the further study.

Key words: M14; apomixis; specially expressed genes; EST; GO